Mesures et incertitudes : mémento pour le professeur

1. Variabilité et incertitude

1.1. Mesure

■ Quelques définitions

On considère une grandeur physique notée x.

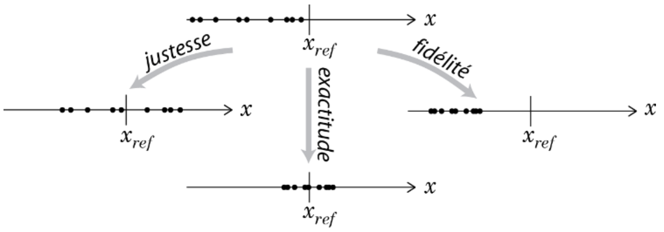
- **Le mesurage** (que nous appellerons « mesure » devant des élèves) est un processus consistant à obtenir expérimentalement une valeur pouvant être attribuée à la grandeur mesurée.
- **Valeur mesurée** : valeur que l'on obtient par mesurage. Elle est notée x_{mes}.
- **Valeur expérimentale** : valeur notée x_{exp} obtenue expérimentalement, par mesurage unique ou multiple, ou par calcul.
- **Valeur de référence** : valeur mesurée à laquelle on accorde plus de confiance, dérivée d'un modèle, issue d'un Handbook, ou constante universelle.

■ Les sources d'incertitude

La qualité de l'instrument de mesure, son maniement par l'expérimentateur, les difficultés de repérage ou la variabilité de la grandeur mesurée sont les principales causes de variabilité d'une mesure.

1.2. Justesse, fidélité, exactitude

Si l'on dispose d'une valeur de référence, on peut caractériser une mesure par les notions de justesse et de fidélité :



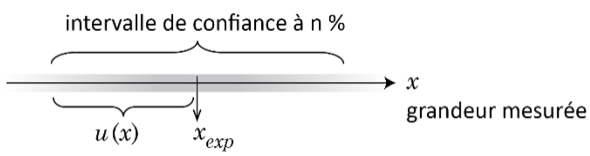
1.3. Incertitude et intervalle de confiance

■ Incertitude de mesure

L'incertitude de mesure est **une estimation** de la variabilité d'une mesure.
Selon la norme AFNOR l'incertitude sur la mesure d'une grandeur x est notée $u(x)$.

■ Incertitude et intervalle de confiance

L'incertitude permet d'estimer **l'intervalle** dans lequel la mesure a des chances de se trouver. Elle est associée à un **niveau de confiance** qui est la probabilité que la mesure soit comprise dans l'intervalle.



Ces deux énoncés sont équivalents :

« L'incertitude sur la mesure de x vaut $u(x)$ avec un niveau de confiance de $N\%$»
« La mesure de x a $N\%$ de chance d'être comprise entre $x_{exp} - u(x)$ et $x_{exp} + u(x)$ »

Une autre manière de l'écrire est : $x = x_{exp} \pm u(x)$

NB : Les notions d'intervalle de confiance, de niveau de confiance ainsi que les écritures qui y font référence ne sont plus préconisées dans les programmes du lycée.

Pour annoncer une mesure et son incertitude, on annoncera donc :

La valeur est x_{exp} ; l'incertitude-type est $u(x)$.

1.4. Incertitude relative

L'incertitude relative est le quotient : $\frac{u(x)}{x_{exp}}$

Elle est souvent exprimée en pourcentage. Plus elle est faible, moins la mesure est dispersée.

2. Estimation d'une incertitude

2.1. Évaluation par une approche statistique (type A)

On dispose d'un **échantillon de N valeurs** mesurées.

- ■ L'incertitude-type d'**UNE** valeur mesurée est l'écart-type de l'échantillon :

$$u(x_i) = s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

- ■ Si l'on réalise une série de N' mesures (ne faisant pas forcément partie de l'échantillon qui a servi à calculer s_{exp}) :
  - → La meilleure valeur à retenir de cette série est la valeur moyenne des N' mesures, notée $\bar{x}$.
  - → L'incertitude-type de **la moyenne** de ces N' mesures est l'écart-type sur la moyenne :

$u(\bar{x}) = \frac{s_{exp}}{\sqrt{N'}}$ s_{exp} est l'écart-type de la série de valeurs, calculé à l'aide des fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un tableur. Le symbole de cet écart-type diffère selon les modèles de calculatrices :

- « Sx » sur les modèles TI ;
- « $x\sigma n - 1$ » sur les modèles Casio ;
- « `Ecart type echantillon` » (pour Numworks).

L'élargissement des incertitudes n'est plus préconisé par les programmes et on ne fera pas mention du niveau de confiance devant les élèves.

2.2. Évaluation par une approche autre que statistique (type B)

L'incertitude d'une mesure effectuée une seule fois conjugue deux sources d'informations :

- des informations techniques sur l'instrument de mesure données par le fabriquant ;
- des informations subjectives sur l'appréciation de la façon dont la mesure a été effectuée.

ACADÉMIE DE LYON
Liberté Égalité Fraternité

■ Valeur issue d'une mesure (ou lecture) sans indication supplémentaire

L'utilisation du dernier chiffre est une façon simplifiée de prendre en compte l'incertitude sur une grandeur mesurée donnée sans intervalle et en l'absence d'autre indication : on peut considérer que l'incertitude est égale à la demi-unité du dernier chiffre exprimé.

■ Mesure unique avec un instrument de mesure gradué

L'incertitude est liée à la lecture. Sans davantage d'indications, on considère que l'incertitude est égale à la demi-graduation ou au demi-écart.

Dans le cas d'une distribution rectangulaire l'incertitude-type vaut :

$$u = \frac{\text{demi} - \text{graduation}}{\sqrt{3}} = 0{,}58 \times \text{demi} - \text{graduation}$$

Pour un instrument vérifié de classe α (généralement analogique), le constructeur indique l'écart maximum toléré (EMT) en pourcentage de la mesure. Avec une distribution rectangulaire l'incertitude-type vaut :

$$u = \frac{EMT}{\sqrt{3}}$$

Dans le cas d'une double lecture sur un instrument gradué, l'incertitude est multipliée par $\sqrt{2}$.

■ Mesure unique avec un instrument à affichage digital

Le constructeur indique pour la précision un pourcentage p de la valeur lue et un nombre N de digit (un digit correspond au dernier chiffre affiché). Il faut chercher cette indication dans la notice de l'appareil. On a alors :

$$u(x_{mes}) = \frac{p \times \text{valeur lue} + N \text{ digit}}{\sqrt{3}}$$
$$\approx p \times \text{valeur lue} + N \text{ digit}$$

■ Prise en compte de différentes sources d'incertitude

Lorsqu'il y a plusieurs sources d'incertitude, il faut tenir compte de toutes les incertitudes et utiliser la relation :

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \cdots}$$

Cependant, il y a parfois un terme qui est très supérieur aux autres, on ne garde alors que celui-là.
Souvent, les valeurs d'incertitude sont de plus en plus faibles selon cet ordre :

1. Incertitudes de repérage par un expérimentateur ;
2. Incertitudes de lecture ;
3. Incertitudes de repérage par un appareil.

■ Grandeur calculée

Si une grandeur y est calculée à partir de plusieurs grandeurs mesurées x_i, alors il existe une relation de la forme : $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$
On a alors :

$$u(y)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2$$

On donne ci-dessous les principaux cas (démontrés à partir de la relation précédente mais donnés aux élèves).

Relation	Incertitude
$y = a + b$ ou $y = a - b$	$u(y) = \sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$
$y = \lambda \cdot a$ (λ constante)	$u(y) = \lvert\lambda\rvert \cdot u(a)$
$y = \frac{a}{b}$ ou $y = a \cdot b$	$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$
$y = \lambda a + \mu b$ (λ et μ constantes)	$u(y) = \sqrt{\lambda^2 (u(a))^2 + \mu^2 (u(b))^2}$
$y = \lambda a^n b^m$	$\frac{u(y)}{\lvert y\rvert} = \sqrt{n^2 \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + m^2 \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$

3. Écriture du résultat d'une mesure

3.1. Écrire une incertitude

L'incertitude-type est arrondie par excès pour ne conserver **qu'un seul chiffre significatif**.

3.2. Écrire une valeur mesurée

La valeur d'une grandeur physique doit être écrite afin que le dernier chiffre significatif ait la même position (en écriture décimale) que le chiffre de l'incertitude.
Attention, un chiffre significatif n'est pas un chiffre dont on est sûr mais **un chiffre qui a une signification**.

3.3. Écrire le résultat d'un calcul

Si les valeurs sont données sans les valeurs d'incertitude, le résultat d'un calcul (impliquant multiplications et/ou divisions) doit être écrit avec le nombre de chiffres significatifs de la donnée qui en possède le moins.
Si les valeurs sont données avec les valeurs d'incertitude, l'incertitude doit être calculée (voir 2.2).

4. Comparaison à une valeur de référence

On compare une valeur mesurée x_{exp} à une valeur de référence $x_{\text{réf}}$ en calculant le quotient suivant :

$$z = \frac{\lvert x_{exp} - x_{ref}\rvert}{u(x)}$$

C'est l'écart rapporté à l'incertitude de mesure.
Ce quotient est souvent appelé *z-score*.
Plus z est faible, plus la mesure peut être jugée compatible avec la valeur de référence. On peut donner aux élèves une valeur seuil, en sachant qu'elle est arbitraire et dépend du niveau d'exigence.